UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO



Repaso de Matemática

Si usted lo único que recuerda de su paso por la escuela media es que fue un lugar donde hizo algunos amigos y amigas, tal vez estas páginas le sea de utilidad. Si recuerda algo de matemática quizás alcance con que lea los temas que le resulte mas dificil. En cualquier caso, aunque le hayan dicho que usted aprobó esta materia cerciorese tratando de resolver los ejercicios propuestos en este breve apunte.

A continuación intentaremos contarles y responder algunas preguntas habituales:

- ¿Cómo operar con fracciones?
- ¿Cómo operar con ecuaciones?
- ¿Cómo operar con sistemas de ecuaciones?
- ¿Cómo graficar funciones lineales y cuadráticas?



¿Cómo operar con fracciones?

Suma de fracciones con igual denominador:

Este caso es el mas fácil de todos, es como la suma de enteros.

Ejemplo 1:

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}$$

Si aparece una variable el procedimiento es exactamente igual.

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{x} = \frac{6}{x}$$

Lo único es que como una fracción es una división, x **no puede valer cero.**

Resta de fracciones con igual denominador:

En realidad es un caso particular de una suma con fracciones de distinto signo.

Ejemplo 3:

$$\frac{1}{4} + \frac{-5}{4} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{4}{4}$$

Ejemplo 4:

$$\frac{7}{4} + \frac{-5}{4} = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4}$$

En general, la suma (resta) se expresa de esta forma:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a+b}{x} \qquad \text{con} \qquad x \neq 0$$



¿Cómo operar con fracciones?

Suma de fracciones con distinto denominador:

Ahora se complica un poco, hay que buscar el denominador común, la manera mas segura es escribir como denominador común la multiplicación de todos los denominadores.

Ejemplo 5:

$$\frac{1}{4} \;+\; \frac{2}{3} \;=\; \frac{3+8}{12} \;=\; \frac{11}{12}$$

Si no entendió va de vuelta lo mismo, pero mas lento:

$$\frac{1}{4} \;+\; \frac{2}{3} \;=\; \frac{1\cdot 3 \;+\; 2\cdot 4}{4\cdot 3} \;=\; \frac{3+8}{12} \;=\; \frac{11}{12}$$

Dado que la resta se puede pensar como **una suma de fracciones de distinto signo**, no se agrega una nueva regla, pero si nuevos ejemplos.

Ejemplo 6:

$$\frac{-1}{4} \;+\; \frac{2}{3} \;=\; \frac{-1\cdot 3 \;+\; 2\cdot 4}{4\cdot 3} \;=\; \frac{-3+8}{12} \;=\; \frac{5}{12}$$

Ejemplo 7:

$$\frac{-1}{4} \;+\; \frac{-2}{3} \;=\; \frac{-1\cdot 3 \;+\; (-2)\cdot 4}{4\cdot 3} \;=\; \frac{-3-8}{12} \;=\; -\frac{11}{12}$$

Tenga cuidado que la regla de los signos se usa **solo** en la multiplicación y división, **nunca** en la suma o en la resta. En la suma o en la resta conviene pensarlo como dinero que tengo a lo que es positivo, y dinero que debo a lo que es negativo.

¿Cómo operar con fracciones?

Viene "facilongo", veamos qué pasa si aparecen variables.

Ejemplo 7:

$$\frac{-1}{4} + \frac{-2}{x} = \frac{-1 \cdot x \ + \ (-2) \cdot 4}{4 \cdot x} = \frac{-x-8}{4x} = -\frac{x+8}{4x}$$

Atención: No se le ocurra simplificar "la x", ese error le puede costar desaprobar un éxamen. Si no entendió el último paso preguntele a su docente.

En general, la suma (resta) se expresa de esta forma:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a \cdot y + b \cdot x}{x \cdot y} = \frac{ay+bx}{xy} \quad \text{con} \quad y \neq 0 \ \text{ y } \ x \neq 0$$

La cuenta se hace con los signos que tengan cada una de las variables (escrito entre paréntesis si no está muy seguro).

Si aparecen mas términos, no hay problema, es mas de lo mismo...

Ejemplo 8:

$$\frac{1}{4} + \frac{-2}{3} - \frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ + \ (-2) \cdot 4 \cdot 5 - 7 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{15-40-84}{60} = -\frac{109}{60}$$

Muchas veces la cuenta puede ser mas sencilla si se obtiene como denominador común al mínimo común múltiplo de los denominadores.



¿Cómo operar con fracciones?

Multiplicación de fracciones

Es simple, se multiplican los numeradores (la parte de arriba) entre sí , luego se hace lo propio con los denominadores (lo de abajo) y se escribe el resultado:

Ejemplo 9:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} \quad = \quad \frac{1\cdot 2}{4\cdot 3} \quad = \quad \frac{2}{12}$$

Ejemplo 10:

$$\frac{-2}{3} \quad \cdot \frac{7}{-5} = \quad \frac{-2\cdot 7}{3\cdot(-5)} \quad = \quad \frac{-14}{-15} \quad = \quad \frac{14}{15}$$

Ejemplo 11:

$$\frac{x+y}{4} \quad \cdot \quad \frac{2}{3} \quad \cdot \frac{7}{x+y} = \quad \frac{(x+y)\cdot 2\cdot 7}{4\cdot 3\cdot(x+y)} \quad = \quad \frac{7}{6} \qquad \text{con} \qquad x+y\neq 0$$

Siempre que sea posible es conveniente simplificar las expresiones.

En general:

$$\frac{a}{b} \quad \cdot \quad \frac{x}{y} = \quad \frac{a\cdot x}{b\cdot y} \quad = \quad \frac{ax}{by} \qquad \text{con} \qquad b\neq 0, y\neq 0$$



¿Cómo operar con fracciones?

División de fracciones

En realidad es una multiplicación, pero no siempre es fácil de verlo. La receta habitual es tomar la fracción divisora (la que divide), invertirla y a este resultado se lo multiplica por la fracción dividendo (la que va a ser dividida por la divisora).

Ejemplo 12:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

A veces se lo escribe como una "fracción de fracciones".

Ejemplo 13:

$$\frac{3/4}{5/7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

Comparando con el ejemplo 12, se invierte a la fracción que quedó en el denominador.

Ejemplo 14:

$$\frac{3km/h}{5h} = \frac{3km}{h} \cdot \frac{1}{5h} = \frac{0,6km}{h^2} = 0,6\,\frac{km}{h^2} = 0,6\ km/h^2$$

Ejemplo 15:

$$\frac{3m/s}{0,3m/s^2} = \frac{3m}{s} \cdot \frac{s^2}{0,3m} = 10\ s$$

Potenciación

Es una forma abreviada de indicar por cuantas veces hay que multiplicar

Ejemplo 16:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$$

¿Cómo operar con fracciones?

Ejercitación

A mucha gente le encanta jugar al futbol, pero para alcanzar un alto rendimiento en este deporte y ser profesional se necesita de muchas horas, en buena medida fatigosas y aburridas, de práctica, de entrenamiento y de gimnasio. Es lo que no se ve, pero es lo que se necesita para alcanzar una meta. Cada uno a su ritmo, hay cosas mas dificiles que la matemática, por ejemplo jugar bien al futbol.

Hacer los ejercicios 6 y 7 de la clase 1 del cuadernillo del Taller de Resolución de Problemas del COPRUN.

Aquí van las respuestas:

6) a:0,8 b:0,6 c:15/4 d:10/21 e:10/21 f:10/21 g:10/21 10/21 h:29/21 i:41/21 j:80/21

7) a:0,25 b:0,125 c:0,25 d:-0,125 e:-0,25 f:-0,125 g:1 h:0 i:2/3 j:1



¿Cómo operar con ecuaciones?

Ecuación es igualdad, y siempre se asocia a ejercicios donde la idea es obtener el valor de la incógnita enmascarada con el nombre de x, aunque obviamente es convencional. Dependiendo del caso ese valor podrá efectivamente hallarse, pero no siempre esto es posible.

Ejemplo 1: Hallar el valor de x:

$$x + 1 = 0$$

este caso es muy sencillo. Hay que dejar a x sola en el miembro izquierdo, lo que quede en el miembro derecho será el resultado. Para hacer eso hay que sacarle a la x el 1, restando 1 en ambos miembros:

$$x + 1 - 1 = 0 - 1$$

$$x = -1$$

comunmente este paso intermedio no se hace explícito, por lo que es mas fácil recordar como que el 1 que suma pasa restando al otro lado del igual. Esta regla mnemotécnica ayuda mucho pero es una fuente habitual de errores. En lo que sigue se mostrará algunos ejemplos con esta regla de inversión de operaciones.

Ejemplo 2: Hallar el valor de x:

$$2x + 1 = 0$$

es también muy sencillo. Notar que primero se "elimina" del lado izquierdo el término independiente (el que no lleva x) y luego se divide por el factor 2.

$$2x + 1 - 1 = 0 - 1$$

$$2x = -1$$

$$2x/2 = -1/2$$

$$x = -1/2$$



¿Cómo operar con ecuaciones?

A ver si le podemos agregar algo de emoción...

Ejemplo 2: Hallar el valor de x:

$$(2x+1)^3 - 100 = -36$$

no es tan sencillo, pero no es tan terrible, se procede igual que antes. Primero, nos sacamos al 100 de encima.

$$(2x+1)^3 - 100 + 100 = -36 + 100$$

$$(2x+1)^3 = 64$$

Ahora para eliminar la potencia cúbica, hay que aplicar la raíz cúbica que es la operación inversa correspondiente. Luego es igual, igual que antes.

$$\sqrt[3]{(2x+1)^3} = \sqrt[3]{64}$$

$$2x + 1 = 8$$

$$2x = 7$$

$$x = 7/2$$

Ejemplo 4: Hallar el valor de x:

$$\frac{(2x+4)^3}{4} - 100 = -46$$

ojo, el 4 está en el mismo término que x, se procede igual que antes. Primero, se va el 100.

$$\frac{(2x+4)^3}{4} - 100 + 100 = -46 + 100$$

$$\frac{(2x+4)^3}{4} = 54$$

¿Cómo operar con ecuaciones?

$$(2x+4)^3 = 216$$

Ahora para eliminar la potencia cúbica, hay que aplicar la raíz cúbica que es la operación inversa correspondiente. Luego es igual, igual que antes.

$$\sqrt[3]{(2x+4)^3} = \sqrt[3]{216}$$

$$2x+4 = 6$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Para los ejemplos, buscamos números fáciles, pero en general no tiene por qué ser así.

Las potencias pares merecen un comentario aparte:

Ejemplo 5:

$$x^2 = 25$$

x^2 no tiene función inversa, con lo cual al aplicar la raíz cuadrada no se obtiene x sino $|x|$, las barras verticales es lo que se llama "módulo" y lo que hace este operador es devolver siempre el positivo de lo que se ponga adentro.

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$



¿Cómo operar con ecuaciones?

Atención: fijarse que el cuadrado de +25 es +5, la solución es única. Lo que no tiene solución única es $|x|$, si se pone adentro del módulo +5 o -5, cualquiera de los dos da +5. Por este motivo, y no por otro es que se dice que esta ecuación tiene dos soluciones x_1 y x_2.

$$x_1 = +5 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -5$$

Ecuación cuadrática, fórmula de Baskara

No es la idea en este apunte deducir la solución, solamente cómo aplicarla. Para aplicar la solución de la ecuación cuadrática, ésta debe escribirse en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con} \;\; a \neq 0 \tag{1}$$

En este caso, la solución se expresa como:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Veamos un ejemplo concreto:

Ejemplo 6: Hallar t:

$$40 \text{ m} + 25 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \, t - 10 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \, t^2 = -50 \text{ m} \tag{3}$$

Se complicó un poco, no solo está escrito como la ecuación (1) sino que además aparecieron unidades. Bueno, como haría Jack..., vamos por partes: primero ordenemos el miembro derecho en potencias decrecientes de t:

$$-10 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \, t^2 + 25 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \, t + 40 \text{ m} = -50 \text{ m} \tag{4}$$

Ahora, llevamos el 50 para el lado izquierdo:

$$-10 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \, t^2 + 25 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \, t + 40 \text{ m} + 50 \text{ m} = -50 \text{ m} + 50 \text{ m} \tag{5}$$

¿Cómo operar con ecuaciones?

$$-10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ t^2 + 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ t + 90\ \mathrm{m} = 0 \tag{6}$$

Ahora recién podemos aplicar la solución de Baskara, si hacemos las siguientes asociaciones:

$$a = -10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{7}$$

$$b = 25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{8}$$

$$c = 90\ \mathrm{m} \tag{9}$$

Si no entiende, vuelva a leerlo, si sigue sin entender pregúntele a un compañero o compañera y si sigue sin entender a su docente.

En este paso hay gente que para no complicarse no escribe las unidades, y escribe la unidad resultante. **Si le conviene hagalo.** Es habitual, hace las cosas mas simples **pero las unidades son parte del cálculo y la unidad debe ser un resultado de este cálculo**. Es mas laborioso esta metodología que propongo pero le puede servir a la hora de verificar si hizo bien las cosas y es matematicamente correcta.

Bueno, dicho esto, ahora se reemplaza en la ecuación (2) y despeja t:

$$t_{\pm} = \frac{-(25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\ \pm \sqrt{(25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 4(-10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(90\ \mathrm{m})}}{2(-10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})} \tag{10}$$

$$t_{\pm} = \frac{-25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \pm \sqrt{625\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 3600\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \tag{11}$$

$$t_{\pm} = \frac{-25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \pm \sqrt{4225\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \tag{12}$$

$$t_{\pm} = \frac{-25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \pm 65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \tag{13}$$



¿Cómo operar con ecuaciones?

Ya casi está, veamos las soluciones por separado:

$$t_+ = \frac{-25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ + 65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = -40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} : \left(20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = -40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \left(\frac{\mathrm{s}^2}{20\ \mathrm{m}}\right) = -2\ \mathrm{s} \tag{14}$$

$$t_- = \frac{-25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ - 65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{-90\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = +90\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} : \left(20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = +90\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \left(\frac{\mathrm{s}^2}{20\ \mathrm{m}}\right) = +4,5\ \mathrm{s} \tag{15}$$

estas son las soluciones hechas **paso a paso**. Luego, la discusión de la interpretación de t como tiempo y la validez de estas soluciones no es terreno de la matemática sino de la física. Como es sabido, puede pasar que la expresión que originalmente quedó en la raíz sea cero o negativo. En el caso que el radicando sea cero, es que hay una solución, y si es negativo quiere decir que las dos soluciones pertenecen al conjunto de los números complejos. Para cinemática, no se contemplan soluciones en este conjunto y se dice que no existe solución real, pero no se dice que no existen soluciones.

Ejercicios: Preparando este apunte observo que un libro que puede llegar a ser de mucha utilidad es *Elementos de Matemática* de Alfredo Novelli, que es un libro de la Universidad Nacional de Luján. En concreto, recomiendo los ejercicios de la pag 180 de ese libro y los de la pag 185 y 186 (correspondiente a la primera reimpresión de 1997).